

3.9 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha \eta \mu x + \beta \sigma \upsilon \nu x$

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Η συνάρτηση $f(x) = \rho \eta \mu(x + \varphi)$ με $\rho > 0$ & $\varphi > 0$

- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
- Η C_f προκύπτει με μετατόπιση κατά φ μονάδες αριστερά της γρ. παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \rho \eta \mu x$
- Είναι περιοδική με περίοδο 2π
- Έχει μέγιστο ρ και ελάχιστο $-\rho$
- Ο αριθμός φ λέγεται **διαφορά φάσεως** των C_f , C_g

2.

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \eta \mu x + \beta \sigma \upsilon \nu x$ με $\alpha, \beta \neq 0$

- Θέτουμε $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \rho$
- Από το σύστημα $\begin{cases} \sigma \upsilon \nu \varphi = \frac{\alpha}{\rho} \\ \eta \mu \varphi = \frac{\beta}{\rho} \end{cases}$ βρίσκουμε το φ
- Τότε $f(x) = \rho \eta \mu(x + \varphi)$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Για να λύσουμε εξίσωση της μορφής $\alpha \eta \mu x + \beta \sigma \upsilon \nu x = \kappa$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha \eta \mu x + \beta \sigma \upsilon \nu x$
- Μετασχηματίζουμε την f στη μορφή $f(x) = \rho \eta \mu(x + \varphi)$
- Η εξίσωση γίνεται $\rho \eta \mu(x + \varphi) = \kappa$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = 4\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x + 2$

Προτεινόμενη λύση

Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

Θέτουμε $g(x) = 4\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Άρα $g_{\max} = 5$ και $g_{\min} = -5$

$f_{\max} = g_{\max} + 2 = 5 + 2 = 7$ και $f_{\min} = g_{\min} + 2 = -5 + 2 = -3$

2.

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x - 2$

Προτεινόμενη λύση

Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

Θέτουμε $g(x) = \eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

Άρα $g_{\max} = \sqrt{10}$ και $g_{\min} = -\sqrt{10}$

$f_{\max} = g_{\max} - 2 = \sqrt{10} - 2$ και $f_{\min} = g_{\min} - 2 = -\sqrt{10} - 2$

3.

Να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του λ ώστε η εξίσωση $\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \lambda$ να έχει λύση.

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \eta\mu x + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3}$ άρα $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

Και $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{2} \\ \eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$

Επομένως $f(x) = 2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Είναι δε $f_{\max} = 2$ και $f_{\min} = -2$

Οπότε, από τη δοσμένη εξίσωση συμπεραίνουμε ότι $\lambda_{\max} = 2$ και $\lambda_{\min} = -2$

Και αφού λ ακέραιος, θα είναι $\lambda = -2$ ή -1 ή 0 ή 1 ή 2

4.

Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{3} \sin x + \eta \mu x = 2\lambda$, όπου λ ακέραιος.

Προτεινόμενη λύση

Ακολουθώντας την άσκηση (3), η εξίσωση γίνεται $2\eta \mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\lambda \Leftrightarrow$

$$\eta \mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \lambda \quad (1)$$

Επειδή $-1 \leq \eta \mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$, θα είναι και $-1 \leq \lambda \leq 1$

Και αφού λ ακέραιος, θα είναι $\lambda = -1$ ή 0 ή 1

- Για $\lambda = -1$, η (1) $\Leftrightarrow \eta \mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$

$$x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

$$x = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$$
- Για $\lambda = 0$, η (1) $\Leftrightarrow \eta \mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \kappa\pi$

$$x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$
- Για $\lambda = 1$, η (1) $\Leftrightarrow \eta \mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

5.

Για τη συνάρτηση $f(x) = 4\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της και να αποδειχθεί ότι είναι περιοδική με περίοδο π .

Προτεινόμενη λύση

Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\eta\mu 2x + 2\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\left[\eta\mu 2x + \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

Από άθροισμα
σε γινόμενο

$$= 2 \cdot 2 \eta\mu \frac{2x + \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{2x - \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{2}$$

$$= 4 \eta\mu \frac{2x + 2x + \frac{\pi}{3}}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{2x - 2x - \frac{\pi}{3}}{2}$$

$$= 4 \eta\mu \frac{4x + \frac{\pi}{3}}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{-\pi}{6}$$

$$= 4 \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Άρα } f_{\max} = 2\sqrt{3} \text{ και } f_{\min} = -2\sqrt{3}$$

$$\text{Ακόμα } f(x + \pi) = 2\sqrt{3} \eta\mu\left(2(x + \pi) + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\sqrt{3} \eta\mu\left(2x + 2\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\sqrt{3} \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = f(x) \quad \text{άρα είναι περιοδική με περίοδο } \pi.$$

6.

Να προσδιορίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = 2\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x).$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu^2 x \\ &= \eta\mu 2x - (1 - \sigma\upsilon\nu 2x) \\ &= \eta\mu 2x - 1 + \sigma\upsilon\nu 2x \\ &= \eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x - 1 \end{aligned}$$

Τύπος διπλασίου και
τύπος αποτετραγωνισμού

$$\text{Είναι } \alpha = 1, \beta = 1 \text{ άρα } \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Και } \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Επομένως } f(x) = \sqrt{2} \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } -1 \leq \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 &\Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - 1 \leq \sqrt{2} \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 &\leq \sqrt{2} - 1 \\ -\sqrt{2} - 1 \leq f(x) &\leq \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f_{\min} = -\sqrt{2} - 1 \text{ και } f_{\max} = \sqrt{2} - 1$$

7.

Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\eta\mu 10^\circ} + \frac{1}{\eta\mu 70^\circ} = \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 10^\circ} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 70^\circ} \right)$

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να δειχθεί ότι $\frac{1}{\eta\mu 10^\circ} + \frac{1}{\eta\mu 70^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 10^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 70^\circ}$

Διαχωρίζουμε
τα τόξα

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta\mu 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 10^\circ} &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 70^\circ} - \frac{1}{\eta\mu 70^\circ} \\ \frac{\sigma\upsilon\nu 10^\circ - \sqrt{3}\eta\mu 10^\circ}{\eta\mu 10^\circ \sigma\upsilon\nu 10^\circ} &= \frac{\sqrt{3}\eta\mu 70^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ}{\eta\mu 70^\circ \sigma\upsilon\nu 70^\circ} \\ \frac{-\sqrt{3}\eta\mu 10^\circ + \sigma\upsilon\nu 10^\circ}{\eta\mu 10^\circ \sigma\upsilon\nu 10^\circ} &= \frac{\sqrt{3}\eta\mu 70^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ}{\eta\mu 70^\circ \sigma\upsilon\nu 70^\circ} \quad (1) \end{aligned}$$

Για την ποσότητα $-\sqrt{3}\eta\mu 10^\circ + \sigma\upsilon\nu 10^\circ$:

είναι $\alpha = -\sqrt{3}$ και $\beta = 1$ άρα $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$$\text{και} \quad \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 150^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \quad -\sqrt{3}\eta\mu 10^\circ + \sigma\upsilon\nu 10^\circ &= 2\eta\mu(10^\circ + 150^\circ) \\ &= 2\eta\mu 160^\circ \\ &= 2\eta\mu(180^\circ - 20^\circ) \\ &= 2\eta\mu 20^\circ \\ &= 4\eta\mu 10^\circ \sigma\upsilon\nu 10^\circ \end{aligned}$$

Το 1^ο μέλος της αποδεικτέας (1) γίνεται $\frac{4\eta\mu 10^\circ \sigma\upsilon\nu 10^\circ}{\eta\mu 10^\circ \sigma\upsilon\nu 10^\circ} = 4$

Ομοίως το 2^ο μέλος της αποδεικτέας (1) γίνεται $\frac{4\eta\mu 20^\circ \sigma\upsilon\nu 20^\circ}{\eta\mu 70^\circ \sigma\upsilon\nu 70^\circ} =$

Συμπληρωματικά τόξα

$$\frac{4\eta\mu 20^\circ \sigma\upsilon\nu 20^\circ}{\sigma\upsilon\nu 20^\circ \eta\mu 20^\circ} = 4$$